Zadatak 081 (Max, gimnazija)

Odredite najmanju vrijednost polinoma $P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+2$.

Rješenje 081

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Polinom stupnja n je funkcija f : R → R definirana s

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent a_n nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent a_0 slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Binomna formula za n = 4.

$$(a+b)^4=a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4.$$
$$(a-b)^4=a^4-4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot a\cdot b^3+b^4.$$

Specijalno:

$$(a-1)^4=a^4-4\cdot a^3+6\cdot a^2-4\cdot a+1.$$

1.inačica

Preoblikujemo zadani polinom.

$$P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+2 \Rightarrow P(x)=x^4-4\cdot x^3+4\cdot x^2+2\cdot x^2-4\cdot x+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x)=\left(x^4-4\cdot x^3+4\cdot x^2\right)+\left(2\cdot x^2-4\cdot x\right)+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x)=\left(\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot 2\cdot x+(2\cdot x)^2\right)+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x)=\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+1+1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x)=\underbrace{\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+1}_{\text{kvadrat zbroja}}+1 \Rightarrow P(x)=\left(x^2-2\cdot x+1\right)^2+1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x)=\left((x-1)^2\right)^2+1 \Rightarrow P(x)=(x-1)^4+1.$$

Polinom ima najmanju vrijednost 1 za x = 1.

$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ P(x)=(x-1)^4+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(1)=(1-1)^4+1 \Rightarrow P(1)=0^4+1 \Rightarrow P(1)=0+1 \Rightarrow P(1)=1.$$

2.inačica

Preoblikujemo zadani polinom tako da uporabimo binomnu formulu.

$$P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+2 \Rightarrow P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1+1 \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow P(x)=\left(x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1\right)+1 \Rightarrow P(x)=(x-1)^4+1.$$

Polinom ima najmanju vrijednost 1 za x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ P(x)=(x-1)^4+1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1)=(1-1)^4+1 \Rightarrow P(1)=0^4+1 \Rightarrow P(1)=0+1 \Rightarrow P(1)=1.$$

Vježba 081

Odredite najmanju vrijednost polinoma $P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+3.$

Rezultat: $P(1)=2.$

Zadatak 082 (Darko, tehnička škola)

Polinom $f(x)=(3\cdot x+2)^7\cdot(x-1)^7$ zapisan je u standardnom obliku. Koliko iznosi koeficijent uz x u tome zapisu? Napomena: Standardni oblik polinoma je $f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_\circ$, gdje su koeficijenti $a_\circ,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ realni brojevi.

$A.\ -1307 \qquad B.\ -448 \qquad C.\ 358 \qquad D.\ 1207$

Rješenje 082

Ponovimo!

$$a^1=a.$$

Polinom stupnja n je funkcija f : R → R definirana s

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent a_n nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent a_0 slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.

www.halapa.com

Binomni poučak

Za svaki $a,\ b\in R,\ n\in N$ vrijedi

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\ \ldots\ +\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+b^n.$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i $k \leq n$. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k}.$$

Neka svojstva:

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n.$$

Binomni poučak primijenit ćemo na oba faktora $(3\cdot x+2)^7$ i $(x-1)^7$.

Prvi razvoj

$$(3\cdot x+2)^7=(3\cdot x)^7+\ldots+\binom{7}{6}\cdot(3\cdot x)^1\cdot 2^6+2^7=(3\cdot x)^7+\ldots+7\cdot 3\cdot x\cdot 64+128=$$

$$=(3\cdot x)^7+\ldots+1344\cdot x+128.$$

Drugi razvoj

$$(x-1)^7=x^7+\ldots+\binom{7}{6}\cdot x^1\cdot(-1)^6+(-1)^7=x^7+\ldots+7\cdot x\cdot 1-1=x^7+\ldots+7\cdot x-1.$$

Odredimo umnožak člana koji sadrži x u prvom razvoju i slobodnog člana u drugom razvoju:

$$1344\cdot x\cdot(-1).$$

Odredimo umnožak člana koji sadrži x u drugom razvoju i slobodnog člana u prvom razvoju:

$$7\cdot x\cdot 128.$$

Zbroj tih umnožaka daje rezultat.

$$1344\cdot x\cdot(-1)+7\cdot x\cdot 128=-1344\cdot x+896\cdot x=-448\cdot x.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 082

Polinom $f(x)=(3\cdot x+2)^6\cdot(x-1)^6$ zapisan je u standardnom obliku. Koliko iznosi koeficijent uz x u tome zapisu? Napomena: Standardni oblik polinoma je $f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_\circ$, gdje su koeficijenti $a_\circ,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ realni brojevi.

$A.\ -392\qquad B.\ 192\qquad C.\ 232\qquad D.\ 345$

Rezultat: B.

Zadatak 083 (Antun, srednja škola)

Ako je polinom $P(x)=x^4+a\cdot x^3+x^2+b\cdot x+2$ djeljiv s $Q(x)=(x-1)(x+2)$, tada b iznosi:

$A.\ 9\qquad B.\ -9\qquad C.\ 13\qquad D.\ -8$

www.halapa.com

Rješenje 083

Ponovimo!

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x)=g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x).
Budući da je polinom P(x) djeljiv s Q(x), postoji polinom R(x) tako da vrijedi:

$$P(x)=Q(x)\cdot R(x)\Rightarrow x^4+a\cdot x^3+x^2+b\cdot x+2=(x-1)\cdot(x+2)\cdot R(x).$$

Za x = 1 je:

$$1^4+a\cdot 1^3+1^2+b\cdot 1+2=(1-1)\cdot(1+2)\cdot R(x)\Rightarrow 1+a+1+b+2=0\Rightarrow a+b=-1-1-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b=-4.$$

Za x = – 2 je:

$$(-2)^4+a\cdot(-2)^3+(-2)^2+b\cdot(-2)+2=(-2-1)\cdot(-2+2)\cdot R(x)\Rightarrow 16-8\cdot a+4-2\cdot b+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8\cdot a-2\cdot b=-16-4-2\Rightarrow -8\cdot a-2\cdot b=-22\Rightarrow -8\cdot a-2\cdot b=-22\ /:(-2)\Rightarrow 4\cdot a+b=11.$$

Iz sustava jednadžba izračunamo b.

$$\left.\begin{array}{l}a+b=-4\\4\cdot a+b=11\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\\text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+b=-4\ /\cdot(-4)\\4\cdot a+b=11\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-4\cdot a-4\cdot b=16\\4\cdot a+b=11\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot b=27\Rightarrow -3\cdot b=27\ /:(-3)\Rightarrow b=-9.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 083

Ako je polinom $P(x)=x^4+a\cdot x^3+x^2+b\cdot x+2$ djeljiv s $Q(x)=(x-1)(x+2)$, tada a iznosi:

$$A.\ 5 \qquad B.\ -5 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ -4$$

Rezultat: A.

Zadatak 084 (Ismar, gimnazija)

Polinom P(x) pri dijeljenju polinomom x + 1 daje ostatak 3, a pri dijeljenju sa x – 1 ostatak 5. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom $x^2 - 1$.

Rješenje 084

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Za svaka dva polinoma P(x) i G(x) ≠ 0 postoje jedinstveni polinomi Q(x) i R(x) takvi da vrijedi:

$$P(x)=G(x)\cdot Q(x)+R(x).$$

Stupanj polinoma R(x) manji je od stupnja polinoma G(x) ili je R(x) = 0.

Ostatak pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom x + 1 je 3.

$$P(x)=(x+1)\cdot Q_1(x)+3 \Rightarrow [x=-1] \Rightarrow P(-1)=(-1+1)\cdot Q_1(-1)+3 \Rightarrow P(-1)=3.$$

Ostatak pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom x – 1 je 5.

$$P(x)=(x-1)\cdot Q_2(x)+5 \Rightarrow [x=1] \Rightarrow P(1)=(1-1)\cdot Q_1(1)+5 \Rightarrow P(1)=5.$$

Ostatak pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom $x^2 - 1$ (polinom drugog stupnja) je polinom prvog stupnja R(x) = a · x + b.

$$P(x)=\left(x^2-1\right)\cdot Q_3(x)+a\cdot x+b \Rightarrow P(x)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot Q_3(x)+a\cdot x+b.$$

Uvrstimo x = – 1.

$$P(-1)=(-1-1)\cdot(-1+1)\cdot Q_3(-1)+a\cdot(-1)+b \Rightarrow P(-1)=0\cdot Q_3(-1)-a+b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(-1)=-a+b \Rightarrow [P(-1)=3] \Rightarrow -a+b=3.$$

Uvrstimo x = 1.

$$P(1)=(1-1)\cdot(1+1)\cdot Q_3(1)+a\cdot 1+b \Rightarrow P(1)=0\cdot Q_3(1)+a+b \Rightarrow P(1)=a+b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P(1)=5] \Rightarrow a+b=5.$$

Iz sustava jednadžba dobije se:

$$\left.\begin{matrix}-a+b=3\\ a+b=5\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{matrix}\right] \Rightarrow 2\cdot b=8 \Rightarrow 2\cdot b=8\ /:2 \Rightarrow b=4.$$

Računamo a.

$$\left.\begin{matrix}b=4\\ a+b=5\end{matrix}\right\} \Rightarrow a+4=5 \Rightarrow a=5-4 \Rightarrow a=1.$$

Traženi ostatak glasi:

$$R(x)=a\cdot x+b \Rightarrow \left[\begin{matrix}a=1\\ b=4\end{matrix}\right] \Rightarrow R(x)=1\cdot x+4 \Rightarrow R(x)=x+4.$$

Vježba 084

Polinom P(x) pri dijeljenju polinomom x – 1 daje ostatak 7, a pri dijeljenju sa x – 3 ostatak 5. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom $x^2 - 4 \cdot x + 3$.

www.halapa.com

Rezultat: – x + 8.

Naputak: $x^2 - 4\cdot x + 3 = (x-1)\cdot(x-3) \ldots P(x) = (x-1)\cdot(x-3)\cdot Q(x) + a\cdot x + b.$

Zadatak 085 (Branko, gimnazija)

Ako se izraz $2\cdot x\cdot(2\cdot x+b)-a\cdot(4\cdot x-a)-a\cdot b$ prikaže u obliku $(A\cdot x+B)\cdot(C\cdot x+D)$, onda je zbroj B + D jednak:

$A.\ b \qquad B.\ b-2\cdot a \qquad C.\ a-2\cdot b \qquad D.\ a+b$

Rješenje 085

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c=b+d.$$

Funkcija oblika

$$f_n(x) = a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + a_{n-2}\cdot x^{n-2} + \ \ldots\ + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Poučak o jednakosti polinoma:

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$2\cdot x\cdot(2\cdot x+b)-a\cdot(4\cdot x-a)-a\cdot b = 4\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x - 4\cdot a\cdot x + a^2 - a\cdot b =$$

$$= \left(4\cdot x^2 - 2\cdot a\cdot x\right) + \left(-2\cdot a\cdot x + a^2\right) + (2\cdot b\cdot x - a\cdot b) =$$

$$= 2\cdot x\cdot(2\cdot x-a) - a\cdot(2\cdot x-a) + b\cdot(2\cdot x-a) = (2\cdot x-a)\cdot(2\cdot x-a+b).$$

Uspoređujemo!

$$(2\cdot x-a)\cdot(2\cdot x-a+b) = (A\cdot x+B)\cdot(C\cdot x+D) \Rightarrow \left.\begin{matrix} A\cdot x+B = 2\cdot x-a \\ C\cdot x+D = 2\cdot x-a+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B=-a \\ D=-a+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B+D = -a-a+b \Rightarrow B+D = b-2\cdot a.$$

Odgovor je pod B.

Ili:

$$(2\cdot x-a)\cdot(2\cdot x-a+b) = (A\cdot x+B)\cdot(C\cdot x+D) \Rightarrow \left.\begin{matrix} A\cdot x+B = 2\cdot x-a+b \\ C\cdot x+D = 2\cdot x-a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B=-a+b \\ D=-a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B+D = -a+b-a \Rightarrow B+D = b-2\cdot a.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 085

Ako se izraz $2\cdot x\cdot(2\cdot x+b)-a\cdot(4\cdot x-a)-a\cdot b$ prikaže u obliku $(A\cdot x+B)\cdot(C\cdot x+D)$, onda je razlika A – C jednaka:

$A.\ 4 \qquad B.\ 0 \qquad C.\ a \qquad D.\ b$

Rezultat: B.

Zadatak 086 (Valentina, gimnazija)

Ako je polinom $P(x) = x^4 + a\cdot x^3 + x^2 + b\cdot x + 2$ djeljiv sa $Q(x) = (x-1)\cdot(x+2)$, tada b iznosi:

$A.\ 9 \qquad B.\ -9 \qquad C.\ 13 \qquad D.\ -8$

www.halapa.com

Rješenje 086

Ponovimo!

Funkcija oblika

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ ...\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_\circ$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Poučak o djeljivosti polinoma

Kada dijelimo polinom P(x) polinomom Q(x) tražimo takav polinom R(x) da je

$$P(x)=Q(x)\cdot R(x).$$

Ako takav polinom R(x) postoji, kažemo da je polinom P(x) djeljiv polinomom Q(x).
Ako je polinom P(x) djeljiv sa Q(x), tada postoji polinom R(x) tako da je

$$P(x)=Q(x)\cdot R(x)\ \Rightarrow\ x^4+a\cdot x^3+x^2+b\cdot x+2=(x-1)\cdot(x+2)\cdot R(x).$$

Za x = 1 vrijedi:

$$1^4+a\cdot 1^3+1^2+b\cdot 1+2=(1-1)\cdot(1+2)\cdot R(1)\ \Rightarrow\ 1+a+1+b+2=0\cdot 3\cdot R(1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1+a+1+b+2=0\ \Rightarrow\ a+b=-4.$$

Za x = – 2 vrijedi:

$$(-2)^4+a\cdot(-2)^3+(-2)^2+b\cdot(-2)+2=(-2-1)\cdot(-2+2)\cdot R(-2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 16-8\cdot a+4-2\cdot b+2=(-3)\cdot 0\cdot R(-2)\ \Rightarrow\ 16-8\cdot a+4-2\cdot b+2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -8\cdot a-2\cdot b=-22\ \Rightarrow\ -8\cdot a-2\cdot b=-22\ /:(-2)\ \Rightarrow\ 4\cdot a+b=11.$$

Iz sustava jednadžba nađemo b.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=-4 \\ 4\cdot a+b=11 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a+b=-4\ /\cdot(-4) \\ 4\cdot a+b=11 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} -4\cdot a-4\cdot b=16 \\ 4\cdot a+b=11 \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -3\cdot b=27\ \Rightarrow\ -3\cdot b=27\ /:(-3)\ \Rightarrow\ b=-9.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 086

Ako je polinom $P(x)=x^4+a\cdot x^3+x^2+b\cdot x+2$ djeljiv sa $Q(x)=(x-1)\cdot(x+2)$, tada a iznosi:

$A.\ -4 \qquad B.\ -5 \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 5$

Rezultat: D.

Zadatak 087 (Matrix, gimnazija)

Ako je $P(x-1)=x^3-3\cdot x+1$, koliko je P(2)?

$A.\ -9 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 16 \qquad D.\ 19$

Rješenje 087

Ponovimo!

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3.$$

Funkcija oblika

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ ...\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_\circ$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

www.halapa.com

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$P(2)=P(3-1)=\left[\begin{matrix}P(x-1)=x^3-3\cdot x+1\\ x=3\end{matrix}\right]=3^3-3\cdot 3+1=27-9+1=19.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Najprije odredimo P(x).

$$P(x-1)=x^3-3\cdot x+1 \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{zamjena}\\ x-1=t\\ x=t+1\end{matrix}\right] \Rightarrow P(t)=(t+1)^3-3\cdot(t+1)+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(t)=t^3+3\cdot t^2+3\cdot t+1-3\cdot t-3+1 \Rightarrow P(t)=t^3+3\cdot t^2+3\cdot t+1-3\cdot t-3+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(t)=t^3+3\cdot t^2+1-3+1 \Rightarrow P(t)=t^3+3\cdot t^2-1 \Rightarrow P(x)=x^3+3\cdot x^2-1.$$

Sada je

$$P(2)=2^3+3\cdot 2^2-1 \Rightarrow P(2)=8+3\cdot 4-1 \Rightarrow P(2)=8+12-1 \Rightarrow P(2)=19.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 087

Ako je $P(x-1)=x^3-3\cdot x+1$, koliko je P(1)?

A. −9 B. 3 C. 16 D. 19

Rezultat: B.

Zadatak 088 (Lidija, maturantica)

Broj 1 – 2 · i je nultočka polinoma $x^3 + a \cdot x + b$ s realnim koeficijentima. Njegova realna nultočka je:

A. −2 B. −1 C. 2 D. −3

www.halapa.com

Rješenje 088

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Funkcija oblika

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ \dots\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.
Nultočka polinoma f zove se svaki kompleksni broj α takav da je f(α) = 0. Ako je α realan broj, onda α zovemo realnom nultočkom od f, a ako je kompleksan, onda ga zovemo kompleksnom nultočkom polinoma f.

Ako su α_1, α_2, α_3, … , α_n nultočke polinoma $f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ \dots\ +a_1\cdot x+a_0$, onda vrijedi:

$$f(x)=a_n\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3)\cdot\ \dots\ \cdot(x-\alpha_{n-1})\cdot(x-\alpha_n).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Poučak o jednakosti polinoma:

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.
Ako je $x_1 = a + b \cdot i$ korijen (nultočka) algebarske jednadžbe f(x) = 0 s realnim koeficijentima, onda je $x_2 = a - b \cdot i$ također korijen te jednadžbe.
Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \overline{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Ako je $x_1 = 1 - 2 \cdot i$ nultočka polinoma, onda je i $x_2 = 1 + 2 \cdot i$ njegova nultočka. Sada slijedi:

$$x^3 + a \cdot x + b = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + a \cdot x + b = \left(x^2 - x \cdot x_2 - x \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2\right) \cdot (x - x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + a \cdot x + b = \left(x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2\right) \cdot (x - x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + a \cdot x + b = \left(x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2\right) \cdot (x - x_3) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - 2 \cdot i \\ x_2 = 1 + 2 \cdot i \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + a \cdot x + b = \left(x^2 - (1 - 2 \cdot i + 1 + 2 \cdot i) \cdot x + (1 - 2 \cdot i) \cdot (1 + 2 \cdot i)\right) \cdot (x - x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + a \cdot x + b = \left(x^2 - (1 - 2 \cdot i + 1 + 2 \cdot i) \cdot x + 1^2 + 2^2\right) \cdot (x - x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + a \cdot x + b = \left(x^2 - 2 \cdot x + 5\right) \cdot (x - x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + a \cdot x + b = x^3 - x^2 \cdot x_3 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot x_3 + 5 \cdot x - 5 \cdot x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + a \cdot x + b = x^3 - (2 + x_3) \cdot x^2 + (5 + 2 \cdot x_3) \cdot x - 5 \cdot x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + 0 \cdot x^2 + a \cdot x + b = x^3 - (2 + x_3) \cdot x^2 + (5 + 2 \cdot x_3) \cdot x - 5 \cdot x_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednakost} \\ \text{polinoma} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -(2 + x_3) = 0 \\ 5 + 2 \cdot x_3 = a \\ -5 \cdot x_3 = b \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 088

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 089 (Tihomir, maturant)

Polinom $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ pri dijeljenju sa x + 1 daje ostatak 11, sa x + 2 ostatak 17, a sa x ostatak 7. Koliko je a + b + c?

$$A.\ 5 \qquad B.\ -5 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 3$$

Rješenje 089

Ponovimo!

Funkcija oblika

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ \ldots\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_\circ$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Nultočka polinoma f zove se svaki kompleksni broj α takav da je f(α) = 0. Ako je α realan broj, onda α zovemo realnom nultočkom od f, a ako je kompleksan, onda ga zovemo kompleksnom nultočkom polinoma f.

Poučak o djeljivosti polinoma

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x)=g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

www.halapa.com

$$\left.\begin{matrix} a\cdot x^2+b\cdot x+c=(x+1)\cdot Q(x)+11 \\ a\cdot x^2+b\cdot x+c=(x+2)\cdot P(x)+17 \\ a\cdot x^2+b\cdot x+c=x\cdot R(x)+7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=-2 \\ x=0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=(-1+1)\cdot Q(-1)+11 \\ a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=(-2+2)\cdot P(-2)+17 \\ a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0\cdot R(0)+7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a-b+c=0\cdot Q(-1)+11 \\ 4\cdot a-2\cdot b+c=0\cdot P(-2)+17 \\ c=0\cdot R(0)+7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a-b+c=11 \\ 4\cdot a-2\cdot b+c=17 \\ c=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a-b+7=11 \\ 4\cdot a-2\cdot b+7=17 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a-b=11-7 \\ 4\cdot a-2\cdot b=17-7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a-b=4 \\ 4\cdot a-2\cdot b=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a-b=4 \\ 4\cdot a-2\cdot b=10\ /:(-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a-b=4 \\ -2\cdot a+b=-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow -a=-1\ /\cdot(-1) \Rightarrow a=1.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{matrix} a=1 \\ a-b=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1-b=4 \Rightarrow -b=4-1 \Rightarrow -b=3 \Rightarrow -b=3\ /\cdot(-1) \Rightarrow b=-3.$$

Sada je

$$a+b+c=1-3+7 \Rightarrow a+b+c=5.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 089

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 090 (Jadranka, maturantica)

Ako je u polinomu $f(x)=\left(x^4-3\cdot x^3+2\cdot x^2-a\cdot x-1\right)^2$ koeficijent uz x^4 jednak – 4 izračunajte a.

Rješenje 090

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot a\cdot d+2\cdot b\cdot c+2\cdot b\cdot d+2\cdot c\cdot d.$$

Funkcija oblika

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ ...\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_\circ$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.
Primijetimo da se pri kvadriranju polinoma pojavljuju kvadrati svih članova i dvostruki produkti svakog člana sa svakim. Članovi s potencijom x^4 pojavit će se u slučajevima:

$$\left(2\cdot x^2\right)^2=\underline{4}\cdot x^4 \quad , \quad 2\cdot x^4\cdot(-1)=\underline{-2}\cdot x^4 \quad , \quad 2\cdot\left(-3\cdot x^3\right)\cdot(-a\cdot x)=\underline{6\cdot a}\cdot x^4.$$

Zbroj koeficijenata mora biti – 4 .

$$4-2+6\cdot a=-4 \Rightarrow 6\cdot a=-4-4+2 \Rightarrow 6\cdot a=-6 \Rightarrow 6\cdot a=-6\ /:6 \Rightarrow a=-1.$$

Vježba 090

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 091 (Zlata, ekonomska škola)

Nađite a za koji je polinom $P(x)=2\cdot x^4-x^3+x^2+a\cdot x+b$ djeljiv polinomom $x^2-3\cdot x+2.$

Rješenje 091

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Funkcija oblika

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ ...\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_\circ$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.
Poučak o djeljivosti polinoma
Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x)=g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x).
Nultočka ili korijen realne funkcije realne varijable je realni broj za koji funkcija f postiže vrijednost jednaku nuli, tj. za koju je f(x) = 0.

www.halapa.com

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$P(x)=\left(x^2-3\cdot x+2\right)\cdot Q(x) \Rightarrow P(x)=\left(x^2-2\cdot x-x+2\right)\cdot Q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=\left(x\cdot(x-2)-(x-2)\right)\cdot Q(x) \Rightarrow P(x)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot Q(x).$$

Dakle, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ su nultočke jednadžbe $x^2-3\cdot x+2=0$. Odatle slijedi:

$$\left.\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[2\cdot x^4-x^3+x^2+a\cdot x+b=(x-1)\cdot(x-2)\cdot Q(x)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot 1^4-1^3+1^2+1\cdot a+b=(1-1)\cdot(1-2)\cdot Q(1) \\ 2\cdot 2^4-2^3+2^2+2\cdot a+b=(2-1)\cdot(2-2)\cdot Q(2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2-1+1+a+b=0 \\ 32-8+4+2\cdot a+b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a+b=-2 \\ 2\cdot a+b=-28 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a+b=-2 \;/\cdot(-1) \\ 2\cdot a+b=-28 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -a-b=2 \\ 2\cdot a+b=-28 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=-26.$$

Vježba 091

Nađite a za koji je polinom $P(x)=2\cdot x^4-x^3+x^2+a\cdot x+b$ djeljiv polinomom $x^2-3\cdot x+2.$

Rezultat: b = 24.

www.halapa.com

Zadatak 092 (Dubravko, gimnazija)

Ako polinom P(x) podijelimo polinomom S(x) dobijemo kvocijent $Q(x) = x^2 + 1$ i ostatak $R(x) = x^3 + 1$. Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma P(x) sa Q(x).

$A.\; x+1 \qquad B.\; -x+1 \qquad C.\; x-1 \qquad D.\; -x-1$

Rješenje 092

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Funkcija oblika

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\;...\;+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Poučak o djeljivosti polinoma

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x) \;\Rightarrow\; P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x) \;/ : Q(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Promatramo

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+1}{x^2+1}$$

i dijeljenjem dobijemo ostatak.

$$\left(x^3+1\right) : \left(x^2+1\right) = x$$

$$\underline{\pm x^3 \pm x}$$

$$-x+1$$

Ostatak je – x + 1.
Ili ovako!

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x+1}{x^2+1} = \frac{x^3+x}{x^2+1} + \frac{-x+1}{x^2+1} = \frac{x \cdot \left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \frac{-x+1}{x^2+1} = \frac{x \cdot \left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \frac{-x+1}{x^2+1} =$$

$$= x + \frac{-x+1}{x^2+1}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 092

Odmor!

Rezultat: …

www.halapa.com